ĐẲNG THỨC, PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH

Câu lạc bộ Toán học:
Chương trình bồi dưỡng chuyên đề Toán

HỘI TOÁN HỌC HÀ NỘI VÀ SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO HÀ NỘI

Hà Nội, Ngày 01.01.2010

Vào 13h30 thứ Tư, Ngày 20.01.2010, Hội Toán học Hà Nội và Sở Giáo dục và Đào tạo Hà Nội phối hợp tổ chức chương trình bồi dưỡng kiến thức chuyên đề Toán cho các cán bộ chỉ đạo chuyên môn, các thầy giáo, cô giáo đang trực tiếp bồi dưỡng học sinh giỏi trên địa bàn Thủ đô.

Chuyên đề sinh hoạt lần này về

Đẳng thức, phương trình và bất phương trình

Chuyên đề do GS.TSKH Nguyễn Văn Mậu,
Chủ tịch Hội Toán học Hà Nội, trực tiếp giảng dạy.

Kính mời các thầy giáo, cô giáo đang trực tiếp bồi dưỡng học sinh giỏi của các quận huyện trên địa bàn Thủ đô quan tâm đến dự.

Thời gian: 13h30 Thứ Tư, Ngày 20.01.2010
Địa điểm: Trường THCS Trưng Vương
Số 26 Hàng Bài, Quận Hoàn Kiếm, Hà Nội

Mục lục

Chương 1

Biến đổi đại số và phân tích ra thừa số

Chương này nhắc lại một số dạng toán cơ bản về đẳng thức đại số và phân tích đa thức thành các nhân tử.

Bài toán 1.1. Phân tích các biểu thức sau thành nhân tử

a) $x^8 + x^4 + 1$, b) $x^8 + x + 1$,
c) $x^8 + x^7 + 1$, d) $x^8 + 3x^4 + 4$.

Bài toán 1.2. Phân tích các biểu thức sau thành nhân tử

a) $(a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3$,
b) $(a-x)y^3 - (a-y)x^3 + (x-y)a^3$,
c) $x(y^2 - z^2) + y(z^2 - x^2) + z(x^2 - y^2)$,
d) $(x+y+z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$.

Bài toán 1.3. Chứng minh rằng đa thức

$$x^{95} + x^{94} + x^{93} + \cdots + x^2 + x + 1$$

chia hết cho

$$x^{31} + x^{30} + \cdots + x^2 + x + 1.$$

Bài toán 1.4. Cho $a + b + c = 0$, chứng minh rằng

a) $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$,
b) $a^3 + a^2c + -abc + b^2c + b^3 = 0$.

Bài toán 1.5. Cho $b = a - 1$, chứng minh rằng

$$(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)\ldots(a^{32}+b^{32}) = a^{64} - b^{64}$$

Bài toán 1.6. Cho $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ và $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0$, Chứng minh rằng

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Bài toán 1.7. Tính tích

$$101 \times 10001 \times 100000001 \times 100 \times \cdots \times \underbrace{100\ldots001}_{2^n-1}.$$

Bài toán 1.8. Xác định các số a, b sao cho đa thức

$$x^4 + x^3 + 2x^2 + ax + b$$

là bình phương của một tam thức bậc hai.

Bài toán 1.9. Tính

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{1970}+\sqrt{1971}}.$$

Bài toán 1.10. Tính tổng

$$\frac{1}{1\times 2\times 3\times 4} + \frac{1}{2\times 3\times 4\times 5} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

Bài toán 1.11. Tính tổng

$$S = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + nx^{n-1}.$$

Bài toán 1.12. Tính tổng

$$1 \times 1! + 2 \times 2! + 3 \times 3! + \cdots + n \times n!.$$

Bài toán 1.13. Chứng minh rằng với mọi a, b không đồng thời

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{x-1} = 1$$

Bài toán 1.14. a, b, c là các số phân biệt, trong đó $c \neq 0$. Chứng minh rằng nếu phương trình $x^2 + ax + bc = 0$ và $x^2 + bx + ca = 0$ có đúng một nghiệm chung, thì hai nghiệm còn lại sẽ thỏa mãn phương trình $x^2 + cx + ab = 0$

Bài toán 1.15. Giả sử $a + b + c < 0$ và phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ không có nghiệm. Xác định dấu của c.

Chương 2

Phương trình nghiệm nguyên

Ta nhắc lại một số dạng toán về phương trình Diophant.

2.1 Phương trình Pitago

Phương trình Pitago là phương trình sau

$$x^2 + y^2 = z^2 \tag{2.1}$$

Bộ ba số nguyên dương (x, y, z) thỏa mãn (1) được gọi là một bộ ba Pitago.

Rõ ràng nếu (x, y, z) là một bộ ba Pitago thì với mọi $d \in \mathbb{N}^*$, (dx, dy, dz) cũng là một bộ ba Pitago. Vì thế chúng ta chỉ cần tìm các bộ ba Pitago (x, y, z) với $(x, y, z) = 1$. Một bộ ba Pitago như vậy gọi là một bộ ba Pitago nguyên thủy.

Bổ đề 2.1. *Nếu (x, y, z) là một bộ ba Pitago nguyên thủy thì x, y, z đôi một nguyên tố cùng nhau. Hơn nữa, x, y không cùng tính chẵn lẻ và z lẻ.*

Chứng minh. Giả sử $(x, y) > 1$. Nếu p là số nguyên tố với $p|x, p|y$ thì $p^2|x^2 + y^2 = z^2 \Rightarrow p|z$. Diều đó trái với giả thiết. Vậy $(x, y) = 1$. Tương tự $(x, z) = 1, (y, z) = 1$,

Vì $(x, y) = 1$ nên x, y không thể cùng chẵn. Giả sử chúng cùng lẻ. Khi đó $x^2 \equiv y^2 \equiv 1 \pmod 4$ suy ra $z^2 \equiv 2 \pmod 4$. Điều này không xảy ra. Vậy x, y không cùng tính chẵn lẻ. Do đó z lẻ.

Vì vai trò của (x, y) bình đẳng nên không giảm tổng quát ta giả thiết y chẵn.

Định lý 2.1. *Bộ ba (x, y, z) là một bộ ba Pitago nguyên thủy (với y chẵn) nếu và chỉ nếu nó có dạng*

$$\begin{aligned} x &= m^2 - n^2 \\ y &= 2mn \\ z &= m^2 + n^2 \end{aligned}$$

trong đó m, n là các số nguyên dương $m > n, (m, n) = 1$ và m, n khác tính chẵn lẻ.

Chứng minh. Giả sử (x, y, z) là bộ ba Pitago nguyên thủy. Ta có $y^2 = z^2 - x^2 = (z+x)(z-x)$. Vì x, z lẻ và y chẵn nên $z+x = 2l, z-x = 2t, y = 2h$. Thay vào ta được $h^2 = lt$.Ta có $z = l+t, x = l-t$. Theo bổ đề $(x, z) = 1 \Rightarrow (l, t) = 1$. Vậy tồn tại m, n sao cho $l = m^2, t = n^2 \Rightarrow h = mn$. Vậy x, y, z có biểu diễn đã nêu. Hơn nữa vì z lẻ nên m, n khác tính chẵn lẻ. Nếu có số nguyên tố p với $p|m, p|n$ thì $p^2|m^2, p^2|n^2 \Rightarrow p|x, p|z$ Mâu thuẫn. Vậy $(m, n) = 1$.

Đảo lại nếu (x, y, z) có dạng trên thì dễ kiểm tra chúng là một bộ ba Pitago. Để chứng minh nó là một bộ ba Pitago nguyên thủy ta chỉ cần chứng minh $(x, z) = 1$. Thật vậy giả sử có số nguyên tố p với $p|x, p|z$. Suy ra $p|x + z = 2m^2, p|z - x = 2n^2$, Vì z lẻ nên p lẻ. Vậy $p|m^2, p|n^2 \Rightarrow p|m, p|n \Rightarrow (m, n) > 1$. Mâu thuẫn .

Ví dụ 2.1. Lấy $m = 2, n = 1$ ta được bộ ba Pitago nguyên thủy nhỏ nhất (3,4,5). Lấy $m = 5, n = 2$ Khi đó theo công thức trên ta thu được bộ ba Pitago nguyên thủy $(21, 20, 29)$.

2.2 Phương trình Fecma

Bên lề của một cuốn sách số học của Diophant xuất bản vào năm 1637, người ta đã tìm thấy Fecma đã viết như sau :" Phương trình $x^n + y^n = z^n$ không có nghiệm nguyên dương với $n \geq 3$. Tôi đã tìm được một cách chứng minh tuyệt diệu điều khẳng định này nhưng vì lề sách quá nhỏ nên không thể trình bày được". Phương trình $x^n + y^n = z^n$ được gọi là phương trình Fecma. Khẳng định:" Phương trình $x^n + y^n = z^n$ không có nghiệm nguyên dương với $n \geq 3$" được gọi là định lý lớn Fecma. Định lý này sau mới được chứng minh đầy đủ năm 1995 bởi Wiles. Người ta không tin Fecma đã chứng minh được định lý này một cách chính xác.

Định lý 2.2. *Phương trình*

$$x^4 + y^4 = z^2 \tag{2.2}$$

không có nghiệm nguyên dương. Từ đó suy ra định lý lớn Fecma đúng với $n = 4$.

Chứng minh. Giả sử phương trình (2) có nghiệm. Gọi (x_0, y_0, z_0) là nghiệm sao cho z_0 là nhỏ nhất. Ta có:

i) $(x_0, y_0) = 1$. Thật vậy nếu trái lại gọi p là ước nguyên tố chung của x_0, y_0. Ta có $p^4|x_0^4 + y_0^4 = z_0^2 \Rightarrow p^2|z_0 \Rightarrow x_0 = px_1, y_0 = py_1, z_0 = p^2z_1 \Rightarrow x_1^4 + y_1^4 = z_1^2$. Vậy (x_1, y_1, z_1) là nghiệm với $z_1 < z_0$. Mâu thuẫn.

ii) Vậy (x_0^2, y_0^2, z_0) là một bộ ba Pitago nguyên thủy. Giả sử y_0 chẵn, x_0 lẻ. Khi đó theo định lý 1 ta có

$$\begin{aligned} x_0^2 &= m^2 - n^2 \\ y_0^2 &= 2mn \\ z_0 &= m^2 + n^2 \end{aligned} \tag{2.3}$$

trong đó m, n là các số nguyên dương $m > n, (m, n) = 1$ và m, n khác tính chẵn lẻ.

Từ (3) suy ra (x_0, n, m) lập thành bộ ba Pitago nguyên thủy. Lại theo định lý 1

$$\begin{aligned} x_0 &= a^2 - b^2 \\ n &= 2ab \\ m &= a^2 + b^2 \end{aligned} \tag{2.4}$$

trong đó a, b là các số nguyên dương $a > b, (a, b) = 1$ và a, b khác tính chẵn lẻ.

Giả sử $y_0 = 2y_1$. Ta có từ (3) $y_0^2 = 4y_1^2 = 2mn = 4ab(a^2+b^2) \Rightarrow y_1^2 = ab(a^2+b^2) = abm$. Lại có $(a, b) = 1 \Rightarrow (a, m) = (b, m) = 1 \Rightarrow a = a_1^2, b = b_1^2, m = m_1^2$. Thay vào (4) ta được $m_1^2 = a_1^4 + b_1^4$. Vậy (a_1, b_1, m_1) là nghiệm của (2) với $m_1 \leqslant m_1^2 = m < m^2 + n^2 = z_0$. Mâu thuẫn.

Hệ quả 2.1. *Định lý lớn Fecma đúng với $n = 2^s, s \geq 2$.*

Thật vậy suy từ $x^{2^s} + y^{2^s} = z^{2^s} \Rightarrow (x^{2^{s-2}})^4 + (y^{2^{s-2}})^4 = (z^{2^{s-2}})^4$.

Mệnh đề *Nếu định lý Fecma lớn đúng cho mọi số nguyên tố lẻ p thì nó đúng với mọi $n \geq 3$.*

Chứng minh. Theo định lý trên ta chỉ cần chứng minh với trường hợp n có ước nguyên tố lẻ p. Giả sử $n = mp$. Khi đó $x^n + y^n = z^n \Rightarrow (x^m)^p + (y^m)^p = (z^m)^p$. Mâu thuẫn vì định lý Fecma lớn đúng cho mọi số nguyên tố lẻ p.

Ole đã chứng minh định lý Fecma lớn với $n = 3$, Diricle với $n = 5$ năm 1825 và Lame với $n = 7$ năm 1825. Năm 1993 đã chứng minh định lý Fecma với mọi số nguyên tố $p < 4.10^6$.

Định lý 2.3. *Phương trình*

$$x^4 - y^4 = z^2 \tag{2.5}$$

không có nghiệm nguyên dương.

Chứng minh. Giả sử phương trình (5) có nghiệm. Gọi (x_0, y_0, z_0) là nghiệm sao cho x_0 là nhỏ nhất. Ta có:

i) $(x_0, y_0) = 1$. Thật vậy nếu trái lại gọi p là ước nguyên tố chung của x_0, y_0. Ta có $p^4 | x_0^4 - y_0^4 = z_0^2 \Rightarrow p^2 | z_0 \Rightarrow x_0 = px_1, y_0 = py_1, z_0 = p^2 z_1 \Rightarrow x_1^4 - y_1^4 = z_1^2$. Vậy (x_1, y_1, z_1) là nghiệm với $x_1 < x_0$. Mâu thuẫn.

ii) Ta có $(x_0^2)^2 = (y_0^2)^2 + z_0^2$. Do đó (y_0^2, z_0, x_0^2) là bộ ba Pitago nguyên thủy.

a) Nếu y_0 lẻ. Theo định lý 1 tồn tại m, n là các số nguyên dương $m > n, (m, n) = 1$ và m, n khác tính chẵn lẻ sao cho $y_0^2 = m^2 - n^2, x_0^2 = m^2 + n^2$. Suy ra $m^4 - n^4 = (x_0 y_0)^2$. Vậy $(m, n, x_0 y_0)$ là một nghiệm của (5). Nhưng $m^2 < m^2 + n^2 = x_0^2 \Rightarrow m < x_0$ Mâu thuẫn.

b) Nếu $y_0 = 2y_1$ chẵn.Theo định lý 1 tồn tại m, n là các số nguyên dương $m > n, (m, n) = 1$ và m, n khác tính chẵn lẻ sao cho $y_0^2 = 2mn, x_0^2 = m^2 + n^2$. Vậy (m, n, x_0) là một bộ ba Pitago nguyên thủy.Theo định lý 1 tồn tại các số nguyên dương $a > b, (a, b) = 1$ và a, b khác tính chẵn lẻ sao cho $x_0 = a^2 + b^2$ còn $m = a^2 - b^2, n = 2ab$ hoặc $m = 2ab, n = a^2 - b^2$. Trong mọi trường hợp ta luôn có $mn = 2ab(a^2 - b^2) \Rightarrow y_0^2 = 2mn = 4ab(a^2 - b^2) \Rightarrow y_1^2 = ab(a^2 - b^2)$. Vì $(a, b) = 1$ nên $(a, a^2 - b^2) = 1; (b, a^2 - b^2) = 1$. Vậy $a = a_1^2, b = b_1^2, a^2 - b^2 = r^2 \Rightarrow a_1^4 - b_1^4 = r^2$. Vậy (a_1, b_1, r) là nghiệm của (5). Nhưng $a_1 < a_1^2 + b_1^2 = a + b \leqslant a^2 + b^2 = x_0$. Mâu thuẫn với cách chọn x_0 là nhỏ nhất.

Ví dụ 2.2. *Chứng minh rằng phương trình $x^4 - 4y^4 = z^2$ không có nghiệm nguyên dương.*

Giải. Giả sử phương trình có nghiệm. Gọi (x_0, y_0, z_0) là nghiệm với z_0 bé nhất. Tương tự như trên ta có $(x_0, y_0) = 1$. Giả sử x_0 chẵn $x_0 = 2k$. Thay vào $16k^4 - 4y_0^4 = z_0^2 \Rightarrow z_0 = 2h, 4k^4 - y_0^4 = h^2$. Vì $(x_0, y_0) = 1$ nên y_0 lẻ. Vậy $y_0^4 \equiv 1 \pmod 4 \Rightarrow h^2 \equiv -1 \pmod 4$ không xảy ra. Vậy x_0 lẻ. Ta có $(x_0^2)^2 = z_0^2 + (2y_0^2)^2$. Do x_0 lẻ và $(x_0, y_0) = 1$ nên $(x_0^2, 2y_0^2) = 1$. Suy ra $(z^2, 2y_0^2, x_0^2)$ là bộ ba Pitago nguyên thủy. Do đó tồn tại các số nguyên dương $a > b, (a, b) = 1$ và a, b khác tính chẵn lẻ sao cho $2y_0^2 = 2ab, x_0^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow a = r^2, b = s^2 \Rightarrow x_0^2 = r^4 + s^4$ trái với định lý 2.

Ví dụ 2.3. *Chứng minh rằng phương trình $x^4 + 4y^4 = z^2$ không có nghiệm nguyên dương.*

Giải. Giả sử phương trình có nghiệm. Gọi (x_0, y_0, z_0) là nghiệm với z_0 bé nhất.Tương tự như trên ta có $(x_0, y_0) = 1$.Giả sử x_0 chẵn $x_0 = 2k$. Thay vào $16k^4 + 4y_0^4 = z_0^2 \Rightarrow z_0 = 2h, 4k^4 + y_0^4 = h^2$. Vậy (y_0, k, h) là nghiệm với $h < 2h = z_0$. Mâu thuẫn.Vậy x_0 lẻ. Ta có $(x_0^2)^2 + (2y_0^2)^2 = z_0^2$. Do x_0 lẻ và $(x_0, y_0) = 1$ nên $(x_0^2, 2y_0^2) = 1$. Suy ra $(x_0^2, 2y_0^2, z_0)$ là bộ ba Pitago nguyên thủy. Do đó tồn tại các số nguyên dương $a > b, (a, b) = 1$ và a, b khác tính chẵn lẻ sao cho $2y_0^2 = 2ab, x_0^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow a = r^2, b = s^2 \Rightarrow x_0^2 = r^4 - s^4$ trái với định lý 3.

Ví dụ 2.4. *Giải các phương trình:*

1. $x^4 - 2y^4 = 1$
2. $x^4 - 2y^4 = -1$

Giải.

1. $x^4 - 2y^4 = 1 \Leftrightarrow x^4 + (y^2)^4 = (y^4 + 1)^2$. Từ định lý 2 suy ra phương trình vô nghiệm.
2. $x^4 - 2y^4 = -1 \Leftrightarrow (y^2)^4 - x^4 = (y^4 - 1)^2$. Từ định lý 3 suy ra ta phải có $(y^4 - 1) = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow x = 1$. Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = y = 1$.

Tiếp theo xét một số đề toán từ các kỳ thi OLympic.

Bài toán 2.1. Cho a, b là các số nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng phương trình

$$ax + by = ab$$

không có nghiệm trong tập các số tự nhiên.

Bài toán 2.2. Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$xy = x + y.$$

Bài toán 2.3. Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$6x^2 + 5y^2 = 74.$$

Bài toán 2.4. Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$19x^2 + 28y^2 = 729.$$

Bài toán 2.5. Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$\frac{xy}{z} + \frac{xz}{y} + \frac{yz}{x} = 3.$$

Bài toán 2.6. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình

$$1 + x + x^2 + x^3 = 2^y.$$

Bài toán 2.7. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình

$$1! + 2! + \cdots + x! = y^2.$$

Bài toán 2.8. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình

$$x + \frac{1}{y + \frac{1}{z}} = \frac{10}{7}.$$

Bài toán 2.9. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình

$$x + y + z = xyz.$$

Bài toán 2.10. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình

$$x^y + 1 = z.$$

Bài toán 2.11. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{1960}.$$

Bài toán 2.12. Tìm nghiệm nguyên của hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ xy - z^2 = 1 \end{cases}$$

Chương 3

Phương trình và bất phương trình đại số

3.1 Phương trình và bất phương trình bậc hai

Xét hàm số (tam thức bậc hai) $f(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$. Khi đó ta có biến đổi sau

$$af(x) = \Big(ax + \frac{b}{2}\Big)^2 - \frac{\Delta}{4},$$

với $\Delta = b^2 - 4ac$. Từ đẳng thức này, ta có kết quả quen thuộc sau về định lý về dấu của tam thức bậc hai.

Định lý 3.1. *Xét tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$. Khi đó*

i) Nếu $\Delta < 0$ thì $af(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

ii) Nếu $\Delta = 0$ thì $af(x) \geqslant 0\ \forall x \in \mathbb{R}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = -\dfrac{b}{2a}$.

iii) Nếu $\Delta > 0$ thì $af(x) = a^2(x - x_1)(x - x_2)$ với

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \mp \frac{\sqrt{\Delta}}{2|a|}. \tag{3.1}$$

Trong trường hợp này, $af(x) < 0$ khi $x \in (x_1, x_2)$ và $af(x) > 0$ khi $x < x_1$ hoặc $x > x_2$.

Từ đó ta thu được kết quả sau.

Định lý 3.2 (Định lí đảo)**.** *Điều kiện cần và đủ để tồn tại số α sao cho $af(\alpha) < 0$ là $\Delta > 0$ và $x_1 < \alpha < x_2$, trong đó $x_{1,2}$ là các nghiệm của $f(x)$ xác định theo (1.2).*

Định lý 3.3 (Viète)**.** *Phương trình bậc hai* $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ *có các nghiệm* x_1, x_2 *khi và chỉ khi*

$$\begin{cases} -\frac{b}{a} = x_1 + x_2 \\ \frac{c}{a} = x_1 x_2 \end{cases}$$

Nhận xét rằng, các định lí trên đều được mô tả thông qua bất đẳng thức (kết quả so sánh biệt thức Δ với 0).

Các định lí sau đây cho ta tiêu chuẩn nhận biết, thông qua biểu diễn hệ số, khi nào thì phương trình bậc hai $f(x) := ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0$, có nghiệm.

Dễ dàng chứng minh định lý sau:

Định lý 3.4. *Với mọi* $a, b\ \ (a \neq 0)$ *cho trước đều tồn tại* c *để phương trình bậc hai* $f(x) := ax^2 + bx + c = 0$ *có nghiệm.*

Tiếp theo, ta chứng minh

Bổ đề 3.1. *Tam thức bậc hai* $f(x) = 3x^2 - 2bx + c$ *có nghiệm (thực) khi và chỉ khi các hệ số* b, c *có dạng*

$$\begin{cases} b = \alpha + \beta + \gamma \\ c = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha \end{cases} \tag{3.2}$$

Chứng minh. Phương trình đã cho có $\Delta' = b^2 - 3c$.

Điều kiện đủ là hiển nhiên vì theo bất đẳng thức Cauchy, ta có

$$\begin{aligned} \Delta' =& b^2 - 3c = (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 3(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) \\ =& \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) \\ =& \frac{1}{2}(\alpha - \beta)^2 + \frac{1}{2}(\beta - \gamma)^2 + \frac{1}{2}(\gamma - \alpha)^2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

Điều kiện cần. Giả sử phương trình bậc hai có nghiệm thực x_1, x_2. Khi đó, theo định lý Viète, thì $\dfrac{x_1 + x_2}{2} = \dfrac{b}{3}$.

Ta chọn $\gamma = \dfrac{b}{3}$ và chứng minh tồn tại α và β thỏa mãn (3.3). Thế vào (3.3), ta được

$$\begin{cases} b = \alpha + \beta + \frac{b}{3} \\ c = \alpha\beta + \frac{b}{3}(\alpha + \beta) \end{cases}$$

hay

$$\begin{cases} \alpha + \beta = \frac{2}{3}b \\ \alpha\beta = c - \frac{2}{9}b^2 \end{cases}$$

Hệ này tương ứng với phương trình bậc hai $t^2 - \frac{2}{3}bt + c - \frac{2}{9}b = 0$, có nghiệm khi và chỉ khi $\Delta' = \frac{b^2}{9} - \left(c - \frac{2}{9}b^2\right) = \frac{1}{3}(b^2 - 3c) \geq 0$, đpcm. □

Từ đây, ta có thể phát biểu kết quả tổng quát

Định lý 3.5. *Tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$ có nghiệm (thực) khi và chỉ khi các hệ số a, b, c có dạng*

$$\begin{cases} -\frac{b}{a} = \frac{2}{3}(\alpha + \beta + \gamma) \\ \frac{c}{a} = \frac{1}{3}(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) \end{cases} \tag{3.3}$$

Chứng minh. Ta sử dụng các biến đổi sau:

$$\begin{aligned} &ax^2 + bx + c = 0 \\ &x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \\ &3x^2 - 2\left(\frac{-3b}{2a}\right)x + \frac{3c}{a} = 0 \end{aligned}$$

Tiếp sau áp dụng kết quả của bổ đề 3.1, ta thu được đpcm. □

3.2 Một số bài toán về phương trình và bất phương trình đại số

Bài toán 3.1. Giải phương trình

$$(x-1)(x-3)(x+5)(x+7) = 297.$$

Bài toán 3.2. Giải phương trình

$$\frac{1}{x^2+2x-3} + \frac{18}{x^2+2x+2} = \frac{18}{x^2+2x+1}.$$

Bài toán 3.3. Giải phương trình

$$\frac{3}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{4}{x-2} + \frac{4}{x-3} + \frac{1}{x-4}\frac{3}{x-5} = 0.$$

Bài toán 3.4. Giải phương trình

$$(x+2)^4 + x^4 = 82.$$

Bài toán 3.5. Giải phương trình trong tập các số nguyên dương

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{\sqrt{4-n}+4}{\sqrt{4-n}+5}.$$

Chương 4

Phương pháp giải một số dạng phương trình vô tỷ

4.1 Phương pháp đặt ẩn phụ

Khi giải phương trình vô tỷ bằng phương pháp đặt ẩn phụ ta có thể đặt ẩn phụ để đưa phương trình đã cho về phương trình đại số không chứa căn thức với ẩn mới là ẩn phụ, hoặc đặt ẩn phụ mà vẫn còn ẩn chính, ta có thể tính ẩn này theo ẩn kia, hoặc đặt ẩn phụ để đưa phương trình về hệ hai phương trình với hai ẩn là hai ẩn phụ, cũng có thể hai ẩn gồm một ẩn chính và một ẩn phụ, thường khi đó ta được một hệ đối xứng, hoặc đặt ẩn phụ để được phương trình có hai ẩn phụ, ta biến đổi về phương trình tích với vế phải bằng 0.

Thường thì khi giải phương trình ta sử dụng các biến đổi tương đương, nếu sử dụng biến đổi hệ quả (không tương đương) thì nhất thiết phải thử (kiểm chứng) lại nghiệm.

Ví dụ 4.1. Giải phương trình sau:

$$18x^2 - 18x\sqrt{x} - 17x - 8\sqrt{x} - 2 = 0.$$

Giải (chú dẫn).
Đặt $\sqrt{x} = y,\ y \geq 0$. Khi đó phương trình đó cho trở thành

$$(3y^2 - 4y - 2)(6y^2 + 2y + 1) = 0,$$

suy ra $3y^2 - 4y - 2 = 0$, ta thu được $y = \dfrac{2+\sqrt{10}}{3}$. Từ đó phương trình có nghiệm là $x = \dfrac{14+4\sqrt{10}}{9}$.

Ví dụ 4.2. Giải phương trình sau:

$$x^2 - 3x + 1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{x^4 + x^2 + 1}.$$

Giải (chú dẫn).
Ta có $x^4 + x^2 + 1 = (x^2+1)^2 - x^2 = (x^2+x+1)(x^2-x+1) > 0$ với mọi x.
Mặt khác $x^2 - 3x + 1 = 2(x^2-x+1) - (x^2+x+1)$.
Đặt $y = \sqrt{\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}}$, ta thu được

$$2y^2 - 1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}y \Leftrightarrow 6y^2 + \sqrt{3}y - 3 = 0, \text{ ta được } y = \frac{\sqrt{3}}{3} (\text{loại } y = -\frac{\sqrt{3}}{2}).$$

Từ đó phương trình có nghiệm là $x = 1$.

Ví dụ 4.3. Giải phương trình sau:

$$\sqrt{2-x^2} + \sqrt{2 - \frac{1}{x^2}} = 4 - \Big(x + \frac{1}{x}\Big).$$

Giải (chú dẫn).
Ta thấy $x < 0$ không thỏa mãn phương trình. Khi đó phương trình tương đương với hệ

$$\begin{cases} x > 0 \\ 4 - \Big(x + \dfrac{1}{x}\Big) > 0 \\ \Big(\sqrt{2-x^2} + \sqrt{2 - \dfrac{1}{x^2}}\Big)^2 = \Big(4 - \Big(x + \dfrac{1}{x}\Big)\Big)^2 \end{cases}$$

Đặt $x + \dfrac{1}{x} = y$, ta được

$$2 \le y < 4 \tag{4.1}$$
$$4 - (y^2 - 2) + 2\sqrt{5 - 2(y^2-2)} = (4-y)^2 \tag{4.2}$$

Xét

$$(4.2) \Leftrightarrow \sqrt{9 - 2y^2} = y^2 - 4y + 5 \Leftrightarrow y^4 - 8y^3 + 28y^2 - 40y + 16 = 0$$

(do hai vế không âm). Điều này tương đương với

$$\Leftrightarrow (y-2)(y^3 - 6y^2 + 16y - 8) = 0 \Leftrightarrow (y-2)[(y-2)(y^2-4y+8) + 8] = 0.$$

Dẫn đến $y = 2$ (do $(y-2)(y^2-4y+8) + 8 > 0,\ \forall y$ thỏa mãn (4.1)). Từ đó phương trình có nghiệm là $x = 1$.

Ví dụ 4.4. Giải phương trình sau

$$2x^2 + \sqrt{1-x} + 2x\sqrt{1-x^2} = 1.$$

Giải (chú dẫn).
Ta có phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
&\sqrt{1-x} = 1-2x^2-2x\sqrt{1-x^2}\\
\Rightarrow &1-x = 1+4x^4+4x^2(1-x^2)-4x^2-4x\sqrt{1-x^2}+8x^3\sqrt{1-x^2}\\
\Leftrightarrow &x(1-4\sqrt{1-x^2}+8x^2\sqrt{1-x^2}) = 0\\
\Leftrightarrow &\left[\begin{aligned}&x=0\\ &1-4\sqrt{1-x^2}+8x^2\sqrt{1-x^2}=0(1)\end{aligned}\right.
\end{aligned}$$

Xét (1), đặt $y=\sqrt{1-x^2}$, suy ra $y \geq 0$ và $x^2 = 1-y^2$.
Ta được

$$\begin{aligned}
1-4y+8y(1-y^2)=0 \Leftrightarrow &8y^3-4y-1=0\\
\Leftrightarrow &(2y+1)(4y^2-2y-1)=0\\
\Leftrightarrow &y=\frac{1+\sqrt{5}}{4}.
\end{aligned}$$

Từ đó suy ra $x = \pm\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{8}}$.

Thử lại ta được nghiệm của phương trình là $x=0$ và $x=-\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{8}}$.

Ví dụ 4.5. Giải phương trình

$$x^2+3x+1=(x+3)\sqrt{x^2+1}.$$

Giải (chú dẫn).
Đặt $\sqrt{x^2+1}=y,\ y\geq 1$. Khi đó ta được $y^2+3x=(x+3)y \Leftrightarrow (y-3)(y-x)=0$.
Dẫn đến $y=3$ và $y=x$. Từ đó phương trình có nghiệm là $x=\pm\sqrt{2}$.

Ví dụ 4.6. Giải phương trình

$$\sqrt[4]{17-x^8}-\sqrt[3]{2x^8-1}=1.$$

Giải (chú dẫn).
Đặt $\sqrt[4]{17-x^8}=y,\ y\geq 0$ và $\sqrt[3]{2x^8-1}=z$. Khi đó ta được hệ

$$\begin{cases} y-z=1\\ 2y^4+z^3=33\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=y-1\\ 2y^4+(y-1)^3=33\end{cases}$$

Xét $2y^4+(y-1)^3=33 \Leftrightarrow (y-2)(2y^3+5y^2+7y+17)=0$. Suy ra được $y=2$.
Từ đó nghiệm của phương trình là $x=\pm 1$.

Ví dụ 4.7. Giải phương trình sau

$$x + \sqrt{4 - x^2} = 2 + 3x\sqrt{4 - x^2}.$$

Giải (chú dẫn).
Đặt $\sqrt{4 - x^2} = y,\ 0 \le y \le 2$. Khi đó ta được hệ

$$\begin{cases} x + y = 2 + 3xy \\ x^2 + y^2 = 4. \end{cases}$$

Thế hoặc lại đặt $x + y = S,\ xy = P$ rồi giải tiếp ta được nghiệm của phương trình là $x = 0,\ x = 2,\ x = \dfrac{-2 - \sqrt{14}}{3}$.

Ví dụ 4.8. Giải phương trình sau

$$\sqrt[3]{81x - 8} = x^3 - 2x^2 + \frac{4}{3}x - 2.$$

Đặt $\sqrt[3]{81x - 8} = 3y \Rightarrow 3x = y^3 - 2y^2 + \dfrac{4}{3}$. Khi đó ta được hệ

$$\begin{cases} 3x = y^3 - 2y^2 + \dfrac{4}{3}y \\ 3y = x^3 - 2x^2 + \dfrac{4}{3}x. \end{cases}$$

Xét hiệu hai phương trình dẫn đến $x = y$ (do $\frac{1}{2}(x-y)^2 + \frac{1}{2}(x-2)^2\frac{1}{2}(y-2)^2 + \frac{1}{3} > 0$). Thay vào hệ và giải phương trình ta được $x = 0, x = \dfrac{3 \pm 2\sqrt{6}}{3}$.

Ví dụ 4.9. Giải phương trình

$$\sqrt{5x^2 + 14x + 9} - \sqrt{x^2 - x - 20} = 5\sqrt{x + 1}.$$

Giải (chú dẫn).
Điều kiện $x \ge 5$. Với điều kiện đó ta biến đổi phương trình đã cho như sau:

$$\begin{aligned} &\sqrt{5x^2 + 14x + 9} = \sqrt{x^2 - x - 20} + 5\sqrt{x + 1} \\ &5x^2 + 14x + 9 = x^2 - x - 20 + 25(x + 1) + 10\sqrt{(x + 1)(x + 4)(x - 5)} \\ &2x^2 - 5x + 2 = 5\sqrt{(x + 1)(x - 5)}\sqrt{x + 4} \\ &2(x + 1)(x - 5) + 3(x + 4) = 5\sqrt{(x + 1)(x - 5)}\sqrt{x + 4}. \end{aligned}$$

Đặt $\sqrt{y = (x + 1)(x - 5)},\ z = \sqrt{x + 4},\ y \ge 0,\ z \ge 3$. Ta được

$$2y^2 - 5yz + 3z^2 = 0 \Leftrightarrow (y - z)(2y - 3z) = 0,$$

từ đó ta được

$$\left[\begin{array}{l} y = z \\ y = \dfrac{3}{2}z. \end{array}\right.$$

Nếu $y = z$ thì ta được $x = \dfrac{5+\sqrt{61}}{2}$ (do $x \geq 5$).

Nếu $y = \dfrac{3}{2}z$ thì ta được $x = 8$ và $x = -\dfrac{7}{4}$. Vậy phương trình có ba nghiệm trên.

Ví dụ 4.10. Giải phương trình $7x^2 + 7x = \sqrt{\dfrac{4x+9}{28}}$, với $x > 0$.

Nhận xét 4.1. Đối với dạng phương trình này ta thường đặt $\sqrt{\dfrac{4x+9}{28}} = ay + b$, sau đó bình phương lên rồi ta "cố ý" biến đổi về hệ đối xứng với hai ẩn $x,\ y$. Từ đó ta sẽ biết được giá trị của $a,\ b$. Với bài toán này ta tìm được $a = 1,\ b = \dfrac{1}{2}$. (Nếu $a = 1$ và $b = 0$ mà giải được thì đó là phương trình quá đơn giản, ta không xét ở đây).

Giải (chú dẫn).

Đặt $\sqrt{\dfrac{4x+9}{28}} = y + \dfrac{1}{2}$ do $x > 0$ nên $\sqrt{\dfrac{4x+9}{28}} > \sqrt{\dfrac{9}{28}} > \dfrac{1}{2}$, từ đó $y > 0$. Ta được hệ

$$\begin{cases} 7x^2 + 7x = y + \dfrac{1}{2} \\ 7y^2 + 7y = x + \dfrac{1}{2} \\ x,\ y > 0. \end{cases}$$

Giải hệ bình thường theo dạng ta được $x = -\dfrac{-6+\sqrt{50}}{14}$.

Ví dụ 4.11. Giải phương trình $\sqrt[3]{x^2 - 2} = \sqrt{2 - x^3}$

Nhận xét 4.2. Khi giải một phương trình không phải lúc nào cũng có nghiệm thực, có những phương trình vô nghiệm nhưng khi cho học sinh làm bài ta cũng kiểm tra được năng lực của học sinh khi trình bầy lời giải bài toán đó. Chẳng hạn như bài toán trong ví dụ này.

Giải (chú dẫn).
Đặt $\sqrt[3]{x^2-2} = \sqrt{2-x^3} = y$, với $y \geq 0$. Khi đó ta được hệ

$$\begin{cases} x^2 = y^3 + 2 \\ x^2 = 2 - y^3 \end{cases}$$

và từ phương trình ban đầu ta có $x \leq -\sqrt{2}$. Xét hiệu hai phương trình của hệ ta được phương trình $(x+y)(x^2 - xy + y^2 - x + y) = 0$.
Với $x = -y$ thì $x = -\sqrt[3]{x^2-2}$, dẫn đến vô nghiệm.
với $x^2 - xy + y^2 - x + y = (y-x)(1-x) + y^2 > 0$ với mọi $y \geq 0$ và $x \leq -\sqrt{2}$.
Do đó hệ vô nghiệm hay phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 4.1. Giải phương trình sau:

$$x^2 + \sqrt{2-x} = x^2\sqrt{2-x}.$$

Giải (chú dẫn).
Đặt $y = \sqrt{2-x},\ y \geq 0$ ta được $(y-1)(y^2+y-1)(2y^2-y-4) = 0$. Từ đó $y = 1,\ y = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2},\ y = \dfrac{\sqrt{33}+1}{8}$ và được nghiệm của phương trình là $x = 1,\ y = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2},\ y = -\dfrac{\sqrt{33}+1}{8}$.

Bài toán 4.2. Giải phương trình sau

$$2x^2 + 5x - 1 = 7\sqrt{x^3-1}.$$

Giải (chú dẫn).
Từ phương trình suy ra $x \neq 1$. Đặt $\sqrt{\dfrac{x^2+x+1}{x-1}} = y$, bình phương dẫn đến $y \geq \sqrt{2+2\sqrt{3}}$. Phương trình trở thành $2y^2 - 7y + 3 = 0$, ta được $y = 3$. Từ đó $x = 4 \pm \sqrt{6}$.

Bài toán 4.3. Giải phương trình

$$(4x-1)\sqrt{x^2+1} = 2x^2 + 2x + 1.$$

Giải (chú dẫn).
Đặt $\sqrt{x^2+1} = y,\ y \geq 1$. Từ đó ta được $y = \dfrac{1}{2}$ hoặc $y = 2x - 1$. Phương trình có nghiệm $x = \dfrac{4}{3}$.

Bài toán 4.4. Giải phương trình sau

$$3(2+\sqrt{x-2}) = 2x + \sqrt{x+6}.$$

Giải (chú dẫn).
Đặt $3\sqrt{x-2} = y,\ \sqrt{x+6} = z,\ y \geq 0,\ z \geq 0$. Ta được $x = 3$ hoặc $y + z = 4$.
Từ đó phương trình có 2 nghiệm $x = 3,\ x = \dfrac{11 - 3\sqrt{5}}{2}$

Bài toán 4.5. Giải phương trình sau

$$\sqrt{2 - \sqrt{2}(x + 11)} + \sqrt[4]{2x} = 1.$$

Giải (chú dẫn).
Điều kiện $0 \leq x \leq \sqrt{2}-1$. Đặt $\sqrt{2 - \sqrt{2}(x + 11)} = \sqrt[4]{2}y \Leftrightarrow y = \sqrt{\sqrt{2} - 1 - x}$ và $\sqrt[4]{2x} = \sqrt[4]{2}z \Leftrightarrow z = \sqrt[4]{x}$ với $y \geq 0,\ z \geq 0$.
Suy ra

$$\begin{cases} \sqrt[4]{2}(y + z) = 1 & (1) \\ y^2 + z^4 = \sqrt{2} - 1 & (2) \end{cases}$$

Từ (1) thay $y = \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}} - z$ vào (2) ta được $(z^2 + 1)^2 - \left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}} + z\right)^2 = 0$.

Xét hiệu hai bình phương suy ra $z = \dfrac{1 \pm \sqrt{\dfrac{4 - 3\sqrt[4]{2}}{4\sqrt{2}}}}{2}$. Từ đó ta được nghiệm của phương trình là $x = \left(\dfrac{1 \pm \sqrt{\dfrac{4 - 3\sqrt[4]{2}}{4\sqrt{2}}}}{2}\right)^4$.

Bài toán 4.6. Giải phương trình

$$x^2 - x - 1000\sqrt{1 + 8000x} = 1000.$$

Giải (chú dẫn).
Đặt $1 + \sqrt{1 + 8000x} = 2y$, ta được $\begin{cases} x^2 - x = 2000y \\ y^2 - y = 2000x. \end{cases} \quad (*)$
Từ (*) suy ra $(x - y)(x + y + 1999) = 0$ và do $x + y + 1999 > 0$ suy ra $x = y$, ta được nghiệm $x = 2001$.

Bài toán 4.7. Giải phương trình sau

$$\frac{\sqrt{x^3 + 1}}{x^2 + 2} = \frac{2}{5}.$$

Giải (chú dẫn).
Đặt $y = \sqrt{x+1} \geq 0,\ z = \sqrt{x^2 - x + 1}$, ta được

$$5yz = 2(y^2 + z^2) \Leftrightarrow \frac{5y}{z} = 2\Big(\frac{y}{z}\Big)^2 + 2 \Leftrightarrow \frac{y}{z} = 2 \vee \frac{y}{z} = \frac{1}{2}.$$

Nếu $\dfrac{y}{z} = 2$ ta được $\sqrt{x+1} = 2\sqrt{x^2 - x + 1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ 4x^2 - 5x + 3 = 0 \end{cases}$ (vô nghiệm).
Nếu $\dfrac{y}{z} = \dfrac{1}{2}$ ta được

$$2\sqrt{x+1} = \sqrt{x^2 - x + 1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x = \dfrac{5 \pm \sqrt{37}}{2} \text{ (thoả mãn).} \end{cases}$$

Bài toán 4.8. Giải phương trình sau

$$2x^2 - 5x + 2 = 4\sqrt{2)(x^3 - 21x - 20)}.$$

Giải (chú dẫn).
Điều kiện $\left[\begin{array}{l} -4 \leq x \leq -1 \\ x \geq 5 \end{array}\right.$ Đặt $\sqrt{2x^2 - 8x - 10} = y$ và $\sqrt{x+4} = z$, với $y \geq 0, z \geq 0$. Khi đó ta được $(y - z)(y - 3z) = 0$. Từ đó phương trình có bốn nghiệm là $x = \dfrac{9 \pm \sqrt{193}}{4}$ và $x = \dfrac{17 \pm 3\sqrt{73}}{4}$.

Bài toán 4.9. Giải phương trình sau

$$x^2 - 4x - 3 = \sqrt{x+5}.$$

Giải (chú dẫn).
Đặt $\sqrt{x+5} = y - 2$, ta được $x = -1,\ x = \dfrac{5 + \sqrt{29}}{2}$.

Bài toán 4.10. Giải phương trình sau

$$2x^2 + 4x = \sqrt{\frac{x+3}{2}}$$

với $x \geq 1$.

Giải (chú dẫn).
Đặt $\sqrt{\dfrac{x+3}{2}} = y + 1$, được $x = \dfrac{-3 + \sqrt{17}}{4} < 1$ (loại), nếu $x \geq -1$ thì $x = \dfrac{-3 + \sqrt{17}}{4}$.

Bài toán 4.11. Giải phương trình sau

$$27x^2 + 18x = \sqrt{x + \frac{4}{3}},$$

với $x > 0$.

Giải (chú dẫn).

Tương tự, ta được $x = \dfrac{-5 + \sqrt{37}}{18}$.

4.2 Phương pháp so sánh

Khi giải phương trình vô tỷ (chẳng hạn $f(x) = g(x)$) bằng phương pháp so sánh, thường là nhằm chỉ ra phương trình chỉ có một nghiệm (nghiệm duy nhất). Ta thường sử dụng các bất đẳng thức cổ điển AM-GM, Cô si, Bunhiacopxki, đưa vế trái về tổng bình phương các biểu thức, đồng thời vế phải bằng 0. Ta cũng có thể sử dụng tính đơn điệu của hàm số (có thể thấy ngay hoặc sử dụng đạo hàm xét sự biến thiên của hàm số) để ước lượng một cách hợp lý.

Thường ta sử dụng các ước lượng như sau: $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) \geq C\ (\leq C) \\ g(x) \leq C\ (lhC) \end{cases} \Leftrightarrow f(x) = g(x) = C$, hoặc ước lượng $f(x) \geq g(x)$ hoặc $f(x) \leq g(x)$.

Ngoài ra đối với bài cụ thể nào đó ta sẽ có cách ước lượng khác.

Cũng có một số phương trình vô tỷ có nhiều hơn một ẩn mà ta giải bằng phương pháp ước lượng .

Ví dụ 4.12. Giải phương trình $\sqrt{4x - 1} + \sqrt{4x^2 - 1} = 1$.

Giải (chú dẫn).

Bài toán này có trong đề thi vào Đại học Bách Khoa và ĐHQG năm 2001. Bài này có nhiều cách giải, đáp án sử dụng đạo hàm.

Ta có thể làm đơn giản như sau: Ta thấy $x = \dfrac{1}{2}$ là nghiệm của phương trình.

Nếu $x > \dfrac{1}{2}$ thì $VT > 1 = VP$.

Nếu $x < \dfrac{1}{2}$ thì $VT < 1 = VP$.

Do đó phương trình không có nghiệm trong hai trường hợp này.

Vậy phương trình có một nghiệm là $x = \dfrac{1}{2}$.

Ví dụ 4.13. Giải phương trình $\sqrt{3x^2 + 6x + 7} + \sqrt{5x^2 + 10x + 14} = 4 - 2x - x^2$.

Giải (chú dẫn).
Bài này quá đơn giản, ước lượng $Vt \geq 5$ còn $Vp \leq 5$, do đó hai vế cùng bằng 5. Ta được phương trình có nghiệm duy nhất là $x = -1$.

Ví dụ 4.14. Giải phương trình

$$\sqrt{x^2 - x + 19} + \sqrt{7x^2 + 8x + 13} + \sqrt{13x^2 + 17x + 7} = 3\sqrt{3}(x + 2).$$

Giải (chú dẫn).
Bài này cách giải có vẻ hơi mất tự nhiên bởi cách "cố ý" cho như vậy. Giáo viên và học sinh có thể sáng tác những bài kiểu đó.
Điều kiện $x \geq -2$. Với điều kiện đó

$$\begin{aligned}
VT &= \sqrt{(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{75}{4}} + \sqrt{(2x-1)^2 + 3(x+2)^2} + \sqrt{\frac{1}{4}(2x-1)^2 + \frac{3}{4}(4x+3)^2} \\
&\geq \frac{75}{4} + \sqrt{3} \mid x + 2 \mid + \frac{\sqrt{3}}{2} \mid 4x + 3 \mid \\
&\geq \mid \frac{5}{2}\sqrt{3} + \sqrt{3}(x+2) + \frac{\sqrt{3}}{2}(4x+3) \mid \\
&\geq 3\sqrt{3}(x+2) = VP
\end{aligned}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x = \dfrac{1}{2}$. Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là$x = \dfrac{1}{2}$.

Ví dụ 4.15. Giải phương trình $2\sqrt[4]{27x^2 + 24x + \dfrac{28}{3}} = 1 + \sqrt{\dfrac{27}{2}x + 6}$.

Giải (chú dẫn).
Phương trình đã cho tương đương với phương trình

$$2\sqrt[4]{\frac{(9x+4)^2}{3} + 4} = 1 + \sqrt{\frac{3(9x+4)}{2}}.$$

Điều kiện: $x \geq -\dfrac{4}{9}$. Đặt $9x + 4 = y$, suy ra $y \geq 0$. Khi đó ta được:

$$2\sqrt[4]{\frac{y^2}{3} + 4} = 1 + \sqrt{\frac{3y}{2}} \Leftrightarrow 4\sqrt{\frac{y^2}{3} + 4} = 1 + \frac{3y}{2} + \sqrt{6y} \text{ (bình phương hai vế).}$$

Theo bất đẳng thức AM-GM ta được $\sqrt{6y} \leq \dfrac{y+6}{2}$, do đó

$$\begin{aligned}
&4\sqrt{\frac{y^2}{3} + 4} \leq 2y + 4 \\
&\Leftrightarrow 4y^2 + 48 \leq 3y^2 + 12y + 12 \\
&\Leftrightarrow (y - 6)^2 \leq 0.
\end{aligned}$$

Từ đó ta được $y = 6$, suy ra $x = \dfrac{2}{9}$ thỏa mãn điều kiện.
Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x = \dfrac{2}{9}$.

Ví dụ 4.16. Giải phương trình $\dfrac{x-3x^2}{2} + \sqrt{2x^4 - x^3 + 7x^2 - 3x + 3} = 2$.

Giải (chú dẫn).
Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{(2x^2 - x + 1)(x^2+3)} = \frac{3x^2 - x + 4}{2} = \frac{(2x^2 - x + 1) + (x^2 + 3)}{2} \quad (1)$$

Phương trình xác định với mọi x là số thực. Theo Bất đẳng thức AM-GM cho hai số dương ta được $Vt(1) \leq Vp(1)$.
Do đó $(1) \Leftrightarrow 2x^2 - x + 1 = x^2 + 3 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$. Từ đó phương trình có nghiệm là $x = -1$ và $x = 2$.

Ví dụ 4.17. Giải phương trình $\sqrt{2-x^2} + \sqrt{2 - \dfrac{1}{x^2}} = 4 - \left(x + \dfrac{1}{x}\right)$

Giải (chú dẫn).
Điều kiện $\left[\begin{array}{ccc} -\sqrt{2} \leq & x & \leq -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} \leq & x & \leq \sqrt{2} \end{array}\right.$
Với điều kiện đó, phương trình đã cho tương đương với phương trình

$$\sqrt{2-x^2} + \sqrt{2 - \frac{1}{x^2}} + \left(x + \frac{1}{x}\right) = 4.$$

Theo Bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta được

$$\begin{cases} (\sqrt{2-x^2} + x)^2 = \sqrt{2-x^2}.1 + x.1)^2 \leq 4 \\ (\sqrt{2 - \dfrac{1}{x^2}} + \dfrac{1}{x})^2 = (\sqrt{2 - \dfrac{1}{x^2}}.1 + \dfrac{1}{x}.1)^2 \leq 4 \end{cases}$$

Suy ra $Vt(1) \leq 4 = Vp(1)$. Do đó $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2-x^2} + x = 2 \\ \sqrt{2 - \dfrac{1}{x^2}} + \dfrac{1}{x} = 2 \end{cases}$, nghĩa là dấu bằng trong hệ xảy ra. Từ đó phương trình có nghiệm duy nhất là $x = 1$.

Ví dụ 4.18. Giải phương trình $\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}} + \sqrt{x} = \sqrt{x+9}$.

Giải (chú dẫn).
Điều kiện $x \geq 0$. Theo Bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta được

$$VT^2 = \big(2\sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+1}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}\big)^2 \leq (x+9)\big(\frac{1}{x+1} + \frac{x}{x+1}\big) = VP^2.$$

Phương trình có nghiệm khi dấu đẳng thức xảy ra hay $\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}} = \dfrac{\frac{1}{\sqrt{x+1}}}{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}} \Leftrightarrow$

$x = \dfrac{1}{7}$.
Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x = \dfrac{1}{7}$.

Ví dụ 4.19. Giải phương trình $13\sqrt{x^2 - x^4} + 9\sqrt{x^2 + x^4} = 16$.

Giải (chú dẫn).
Điều kiện $-1 \leq x \leq 1$.
Với điều kiện đó phương trình tương đương với

$$|\, x \,|\, (13\sqrt{1-x^2} + 9\sqrt{1+x^2}) = 16 \Leftrightarrow x^2(13\sqrt{x^2-x^4} + 9\sqrt{x^2+x^4})^2 = 256 \quad (1).$$

Theo Bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta được

$$\begin{aligned}(13\sqrt{1-x^2} + 9\sqrt{1+x^2})^2 &= (\sqrt{13}\sqrt{13}\sqrt{1-x^2} + 3\sqrt{3}\sqrt{3}\sqrt{1+x^2})^2 \\ &\leq (13+27)(13(1-x^2) + 3(1+x^2)) \\ &= 40(16 - 10x^2)\end{aligned}$$

Theo Bất đẳng thức AM-GM cho hai số dương ta được

$$10x^2(16 - 10x^2) \leq \big(\frac{10x^2 + (16 - 10x^2)}{2}\big)^2 = 64.$$

Do đó $Vt(1) \leq 4.64 = 256$, ta được

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{1-x^2} = \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{3} \\ 10x^2 = 16 - 10x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 - 9x^2 = 1 + x^2 \\ 20x^2 = 16 \end{cases}$$

. Từ đó dẫn đến $x = \pm\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.
Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = \pm\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

Ví dụ 4.20. Giải phương trình $\sqrt[3]{x^2-2} = \sqrt{2-x^3}$.

Nhận xét 4.3. Trong phần giải phương trình vô tỷ bằng Phương pháp đặt ẩn phụ ta đã giải bài toán này, ta cũng có thể giải nó bằng phương pháp ước lượng như sau.

Giải (chú dẫn).
Điều kiện $2 - x^3 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \sqrt[3]{2}$.
Giả sử x là nghiệm của phương trình. Khi đó $x^2 - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq \sqrt{2} \\ x \leq -\sqrt{2} \end{array}\right.$, ta được $x \leq -\sqrt{2}$. Mũ 6 hai vế suy ra $x^9 - 6x^6 + x^4 + 12x^3 - 4x^2 - 4 = 0(*)$.
Cách thứ nhất ta biến đổi Vt thành $x^9 - 5x^6 + x^2(x^4 - x^2 + 1) + 12x^3 - 3x^2 - 4$ là một biểu thức âm khi $x \leq -\sqrt{2}$.
Cách thứ hai ta biến đổi Vt thành $x^9 - x^4(6x^2 - 1) + 12x^3 - 4x^2 - 4$ cũng là một biểu thức âm khi $x \leq -\sqrt{2}$.
Ta có thể biến đổi tiếp phương trình (*) sau khi chia hai vế cho $x - 1 \neq 0$, ta được

$$\begin{aligned} &x^8 + x^7 + x^6 - 5x^5 - 5x^4 - 4x^3 + 8x^2 + 4x + 4 = 0 \\ \Leftrightarrow &x^6(x^2 + x + 1) - 5x^4(x + 1) - 4x(x^2 - 1) + 4(2x^2 + 1) = 0 \end{aligned}$$

vô nghiệm vì Vt luôn dương khi $x \leq -\sqrt{2}$. Vậy phương trình vô nghiệm.

Ví dụ 4.21. Giải phương trình

$$\sqrt{(x+2)(2x-1)} - 3\sqrt{x+6} = 4 - \sqrt{(x+6)(2x-1)} + 3\sqrt{x+2}.$$

Giải (chú dẫn).
Biến đổi phương trình thành $(\sqrt{x+6} + \sqrt{x+2})(\sqrt{2x-1} - 3) = 0$, suy ra $x \geq 5$. Vt là hàm số đồng biến trên đoạn $[5; +\infty)$. Từ đó dẫn đến $x = 7$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

Ví dụ 4.22. Giải phương trình $2x^2 - 11x + 21 - \sqrt[3]{4x-4} = 0$.

Giải (chú dẫn).
Phương trình tương đương với

$$(x-3)(2x-5) = \frac{12(x-3)}{\sqrt[3]{(4x-4)^2} + 2\sqrt[3]{4x-4} + 4}.$$

Ta thấy $x = 3$ là nghiệm của phương trình.
Nếu $x \neq 3$ thì phương trình tương đương với

$$2x - 5 = \frac{12}{\sqrt[3]{(4x-4)^2} + 2\sqrt[3]{4x-4} + 4}. \qquad (1)$$

Nếu $x > 3$ thì $Vt(1) > 1 > Vp(1)$.
Nếu $x < 3$ thì $Vt(1) < 1 < Vp(1)$.
Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x = 3$.

Ví dụ 4.23. Giải phương trình $\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{x^2-3x+2} = \sqrt{2x^2+2x+3}+\sqrt{x^2-x+6}$.

Nhận xét 4.4. Với bài toán này ta sử dụng một ước lượng ít gặp sau đây:

$$\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)} = \sqrt{f(x)+a.h(x)}+\sqrt{g(x)+b.h(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0,\ g(x) \geq 0 \\ h(x) = 0 \end{cases}$$

với $a,\ b$ là hai số thực dương.

Giải (chú dẫn).
Biến đổi phương trình

$$\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{x^2-3x+2} = \sqrt{2x^2-1+2(x+2)}+\sqrt{x^2-3x+2+2(x+2)}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-1 \geq 0,\ x^2-3x+2 \geq 0 \\ x+2 = 0 \end{cases}$$

Từ đó ta được phương trình có nghiệm là $x = -2$.

Ví dụ 4.24. Giải phương trình

$$\frac{16}{\sqrt{x-1996}}+\frac{1}{\sqrt{x-2008}} = 10-\sqrt{x-1996}+\sqrt{y-2008}$$

Nhận xét 4.5. Với bài toán này, ta thấy đây là một phương trình gồm hai ẩn. Do đó ta nghĩ đến biến đổi phương trình thành phương trình mới có Vt là tổng các bình phương, còn Vp bằng 0.

Giải (chú dẫn).
Biến đổi phương trình thành

$$\left(\sqrt[4]{x-1996}-\frac{4}{\sqrt[4]{x-1996}}\right)^2+\left(\sqrt[4]{y-2008}-\frac{4}{\sqrt[4]{y-2008}}\right)^2 = 0$$

Từ đó ta được phương trình có nghiệm là $(x; y) = (2012; 2009)$.

Ví dụ 4.25. Giải phương trình $x\sqrt{y-1}+2y\sqrt{x-1} = \dfrac{3}{2}$.

Giải (chú dẫn).
Điều kiện $x \geq 1,\ y \geq 1$.
Ta có

$$\begin{aligned} x\sqrt{y-1} + 2y\sqrt{x-1} &= -y(x - 2\sqrt{x-1}) - \frac{1}{2}x(y - 2\sqrt{y-1}) + \frac{3}{2}xy \\ &= -y(\sqrt{x-1} - 1)^2 - \frac{1}{2}x(\sqrt{y-1} - 1)^2 + \frac{3}{2}xy \end{aligned}$$

Khi đó phương trình đó cho tương đương với

$$\begin{cases} x \geq 1,\ y \geq 1 \\ y(\sqrt{x-1} - 1)^2 + \frac{1}{2}x(\sqrt{y-1} - 1)^2 = 0 \end{cases}$$

Từ đó ta được phương trình có nghiệm là $(x; y) = (2; 2)$.

4.3 Phương pháp lượng giác

Ví dụ 4.26. Giải phương trình $\sqrt{4x-1} + \sqrt{4x^2-1} = 1$.

Giải (chú dẫn).
Bài toán này (đã xét ở trên) cũng có thể giải bằng phương pháp lượng giác. Đặt

$$\begin{cases} \sqrt[4]{4x-1} = \cos y \\ \sqrt[4]{4x^2-1} = \sin y \end{cases},\ y \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$

Khi đó ta được phương trình

$$\begin{aligned} &\cos^8 y - 2\cos^4 y + 8\cos^2 - 7 = 0 \\ \Leftrightarrow &(\cos y - 1)(...) = 0 \\ \Leftrightarrow &\cos y = 1 \end{aligned}$$

Do vậy phương trình có một nghiệm là $x = \frac{1}{2}$.

Ví dụ 4.27. Giải phương trình $\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 2\sqrt{2}$.

Giải (chú dẫn).
Đặt $x = \cos y,\ y \in (0; \pi),\ y \neq \frac{\pi}{2}$. Phương trình đã cho trở thành

$$\frac{1}{\cos y} + \frac{1}{\sqrt{\sin y}} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \sin y + \cos y = \sqrt{2}\sin 2y.$$

Đặt $\sin y + \cos y = z$, $-\sqrt{2} \le z \le \sqrt{2}$ suy ra $\sin 2y = z^2 - 1$, ta được $z = \sqrt{2}$ và $z = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
Với $z = \sqrt{2}$ thì $y = \dfrac{\pi}{4}$, do đó $x = \dfrac{2}{2}$.
Với $z = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ thì $y = \dfrac{11\pi}{12}$, do đó $x = -\dfrac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$. Vậy phương trình có nghiệm là $x = \dfrac{2}{2}$ và $x = -\dfrac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.

Ví dụ 4.28. Giải phương trình $x^3 + \sqrt{(1-x^2)^3} = x\sqrt{2(1-x^2)}$.

Giải (chú dẫn).
Điều kiện $-1 \le x \le 1$.
Đặt $x = \sin y$, $y \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$ suy ra $\cos y \ge 0$.
Khi đó phương trình trở thành $\sin^3 y + \cos^3 y = \sqrt{2}\sin y \cos y$. Đặt $\sin y + \cos y = z$, $z \in [-\sqrt{2}; -\sqrt{2}]$ (chính xác là $z \in [-1; \sqrt{2}]$), biến đổi phương trình ta được

$$\begin{aligned} z^3 + \sqrt{2}z^2 - 3z - \sqrt{2} = 0 &\Leftrightarrow (z-\sqrt{2})(z+\sqrt{2}-1)(z+\sqrt{2}+1) = 0 \\ &\Leftrightarrow z = \sqrt{2} \vee z = 1 - \sqrt{2} \end{aligned}$$

Nếu $z = \sqrt{2}$ thì $y = \dfrac{\pi}{4}$, do đó $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
Nếu $z = 1 - \sqrt{2}$ thì $\sin y + \cos y = 1 - z = 1 - \sqrt{2}$, do đó

$$x + \sqrt{1-x^2} = 1 - \sqrt{2} \Leftrightarrow x = \frac{1 - \sqrt{2} - \sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm trên.

4.4 Một số phương pháp khác

Ngoài những phương pháp thường gặp ở trên, đôi khi ta cũng có những lời giải không chính thống (phương pháp đặc biệt)đối với một số phương trình vô tỷ. Cũng có thể ta sử dụng kết hợp các phương pháp ở trên để giải một phương trình.

Ví dụ 4.29. Giải phương trình $\sqrt{x^2 - 3\sqrt{2}x + 9}\sqrt{x^2 - 4\sqrt{2}x + 16} = 5$.

Giải (chú dẫn).
Nếu $x \le 0$ thì $\sqrt{x^2 - 3\sqrt{2}x + 9}\sqrt{x^2 - 4\sqrt{2}x + 16} \ge 3 + 4 = 7 > 5$ (phương

trình không có nghiệm).
Nếu $x > 0$ thì ta xét tam giác vuông ABC với $A = 90°$, AB = 4; AC = 3.
Gọi AD là phân giác của góc A, lấy M thuộc tia AD. Đặt $AM = x$, xét $\triangle ACM$ có $x^2 - 3\sqrt{2}x + 9$ và xét $\triangle ABM$ có $BM^2 = x^2 - 4\sqrt{2}x + 16$.
Từ đó suy ra $\sqrt{x^2 - 3\sqrt{2}x + 9}\sqrt{x^2 - 4\sqrt{2}x + 16} = CM + BM \geq BC = 5$.
Dấu đẳng thức xảy ra khi $M \equiv D$, hay

$$\frac{CM}{BM} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow 16CM^2 = 9BM^2$$

$$\Leftrightarrow 16(x^2 - 3\sqrt{2}x + 9) = 9(x^2 - 4\sqrt{2}x + 16) \ \Leftrightarrow 7x - 12\sqrt{2}x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{12\sqrt{2}}{7}.$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = \dfrac{12\sqrt{2}}{7}$.

Ví dụ 4.30. Giải phương trình

$$\sqrt{4 - x^2} + \sqrt{4x + 1} + \sqrt{x^2 + y^2 - 2y - 3} = 5 - y + \sqrt[4]{x^4 - 16}.$$

Giải (chú dẫn).
Đặt điều kiện cho phương trình xác định ta sẽ được $| \ x = 2 \ |$. Khi đó phương trình trở thành $| \ y - 1 \ | = 2 - y$, suy ra $y = \dfrac{3}{2}$. Vậy phương trình có một nghiệm là $(x; y) = (2; \dfrac{3}{2})$.

Ví dụ 4.31. Giải phương trình $\sqrt[3]{7x + 1} - \sqrt[3]{x^2 - x - 8} + \sqrt[3]{x^2 - 8x + 1} = 2$.

Giải (chú dẫn).
Đặt $y = \sqrt[3]{7x + 1};\ -z = \sqrt[3]{x^2 - x - 8};\ t = \sqrt[3]{x^2 - 8x + 1}$, suy ra

$$\left[\begin{array}{l} y + z + t = 2 \\ y^3 + z^3 + t^3 = 8 \end{array}\right. \qquad (1)$$

Mặt khác $(y + z + t)^3 = 8(2)$.
Từ (1) và (2) ta được

$$(y + z + t)^3 - (y^3 + z^3 + t^3) = 3(x + y)(y + z)(z + t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y + z = 0 \\ z + t = 0 \\ t + y = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = -z(3) \\ z = -t(4) \\ t = -y(5) \end{array}\right.$$

Xét (3) ta được $x = -1 \vee x = 9$, xét (4) được $x = 1$ và (5) được $x = 0 \vee x = 1$.
Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{-1;\ 0;\ 1;\ 9\}$.

Ví dụ 4.32. Giải phương trình $\sqrt{x^2-4x+20}+\sqrt{x^2+4x+29}=\sqrt{97}$.

Giải (chú dẫn).

Trong mặt phẳng tọa độ xét hai véc tơ $\overrightarrow{a}=(x-2;4)$, $\overrightarrow{b}=(-x-2;5)$. Khi đó ta được $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=(-4;5)$, suy ra $|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|=\sqrt{97}$ và ta cũng có $|\overrightarrow{a}|=\sqrt{x^2-4x+20}$, $|\overrightarrow{b}|=\sqrt{x^2+4x+20}$. Phương trình trở thành $|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|=|\overrightarrow{a}|+|\overrightarrow{b}|$, đẳng thức đó xảy ra khi $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$ cùng chiều $\Leftrightarrow \dfrac{x-2}{4}=\dfrac{-x-2}{5}$. Từ đó ta được phương trình có một nghiệm là $x=\dfrac{2}{9}$.

Ví dụ 4.33. Giải phương trình $\sqrt{1+\sqrt{2x-x^2}}+\sqrt{1-\sqrt{2x-x^2}}=2(x-1)^4(2x^2-4x+1)$

Giải (chú dẫn).

Đặt $y=\sqrt{2x-x^2}\sqrt{1-(x-1)^2}$, suy ra $\begin{cases}0\le y\le 1\\(x-1)^2=1-y^2.\end{cases}$

Ta được $\sqrt{1+y}+\sqrt{1-y}=2(1-y^2)^2(1-2y^2)\quad(1)$.

Mặt khác $\sqrt{1+y}+\sqrt{1-y}\ge 1+\sqrt{1-y^2}\ge 2-y^2\quad(2)$.

Từ (1) và (2), suy ra $2(1-y^2)^2(1-2y^2)\ge 2-y^2$. Đặt $z=y^2$, ta được $0\le z\le 1$ và $2(1-z)^2(1-2z)\ge 2-z\Leftrightarrow z(4z^2-10z+7)\le 0\Leftrightarrow z\le 0$(do $4z^2-10z+7>0$).

Do đó $z=0$, suy ra $y=0$ hay $2x-x^2=0\Leftrightarrow x=0\vee x=2$. Vậy phương trình có nghiệm là $x=0$ và $x=2$.

4.5 Một số bài toán thi học sinh giỏi

Bài toán 4.12. Giải phương trình $x\sqrt[3]{x-2}-11\sqrt[3]{-x^2+4x-4}+14=5x+13\sqrt[3]{x-2}$.

Bài toán 4.13. Giải phương trình $\sqrt[3]{x^2+2}-\sqrt[3]{2x^3-3x+1}=2x^3-x^2-3x-1$.

Bài toán 4.14. Giải phương trình $\sqrt[4]{x+8}+\sqrt{x+4}=\sqrt{2x+3}+\sqrt{3x}$.

Bài toán 4.15. Giải phương trình $x^2-2x+3=\sqrt{2x^2-x}+\sqrt{1+3x-3x^2}$.

Bài toán 4.16. Giải phương trình $\sqrt{\dfrac{2007-2008x}{x}}=\dfrac{x^2+2009x}{x^2+2007}$.

Bài toán 4.17. Giải các phương trình

1. $x\sqrt{1+x}+\sqrt{3-x}=2\sqrt{1-x^2}$.

2. $\sqrt{x}+\sqrt[3]{x+7}=\sqrt[4]{x+80}$.

3. $\sqrt[3]{x}+1=2(2x-1)^3$.

4. $8x^2+\sqrt{\dfrac{1}{x}}=\dfrac{5}{2}$.

5. $\sqrt[4]{x}=\dfrac{3}{8}+2x$.

6. $x^2+2x+4=3\sqrt{x^3+4x}$.

Bài toán 4.18 (1995 - Bảng A.VMO)**.** Giải phương trình $x^3-3x^2-8x+40-8\sqrt[4]{4x+4}=0$.

Giải (chú dẫn).
Điều kiện $x\geq -1$.
Khi đó xét $f(x)=x^3-3x^2-8x+40$ và $g(x)=4\sqrt[4]{4x+4}$ trên đoạn $[-1;+\infty)$.
Ta được $f(x)=g(x)$, áp dụng Bất đẳng thức AM-GM cho bốn số không âm, ta được

$$g(x)=\sqrt[4]{2^4.2^4.2^4.(4x+4)}\leq\frac{1}{4}(2^4+2^4+2^4+(4x+4))=x+13\quad(1)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $2^4=4x+4\Leftrightarrow x=3$.
Mặt khác

$$\begin{aligned}x^3-3x^2-8x+40\geq x+13&\Leftrightarrow(x-3)(x^2-9)\geq 0\\&\Leftrightarrow(x-3)^2(x+3)\geq 0\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=3$.
Từ (1) và (2), ta được $g(x)\leq x+13\leq f(x)$. Cả hai đẳng thức đều xảy ra khi $x=3$, thỏa mãn điều kiện.
Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x=3$.

Nhận xét 4.6. Ta có thể sử dụng đạo hàm để xét sự biến thiên của các hàm số $f(x)$ và $g(x)$ trên đoạn $[-1;+\infty)$, ta được $\min\limits_{[-1;+\infty)}f(x)=f(3)=13$ và $\max\limits_{[-1;+\infty)}g(x)=g(3)=13$.
Hoặc ta có thể đặt $\sqrt[4]{4x+4}=y$, với $y\geq 0$ sau đó dùng đạo hàm để khảo sát sự biến thiên của hàm số $f(y)=y^{12}-24y^8+16y^4-512y+2816$ ($f'(y)=2(y-2)h(y)$ với $h(y)>0$).

Bài toán 4.19 (1995 - Bảng B.VMO)**.** Giải phương trình $2x^2 - 11x + 21 - 3\sqrt[3]{4x-4} = 0$.

Giải (chú dẫn).
Đặt $\sqrt[3]{4x - 4 = y}$.
Khi đó $x = \dfrac{y^3+4}{4}$ và suy ra $x^2 = \dfrac{y^6 + 8y^3 + 16}{16}$. Từ đó ta có phương trình

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{8}(y^6 + 8y^3 + 16) - \frac{11}{4}(y^3 + 4) - 3y - 21 = 0\\
\Leftrightarrow &y^6 - 14y^3 - 24y + 96 = 0 \quad (1)\\
\Leftrightarrow &(y-2)^2(y^4 + 4y^3 + 12y^2 + 18y + 14) = 0. \quad (2)
\end{aligned}$$

Do $y \le 0$ thì Vế trái của (1) dương, do đó ta xét $y > 0$, khi đó $y^4 + 4y^3 + 12y^2 + 18y + 14 > 0$. Nên từ (2) ta thấy $y = 2$ hay $\sqrt[3]{4x-4} = 2$, ta được $x = 3$.Thử lại đúng.
Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x = 3$.

Bài toán 4.20 (2002 - Bảng A.VMO)**.** Giải phương trình $\sqrt{4 - 3\sqrt{10 - 3x}} = x - 2$.

Giải (chú dẫn).
Điều kiện $\dfrac{74}{27} \le x \le \dfrac{10}{3}$. Với điều kiện đó phương trình đã cho tương đương với phương trình

$$\begin{aligned}
4 - 3\sqrt{10 - 3x} = x^2 - 4x + 4 &\Leftrightarrow 9(10 - 3x) = x^2(4 - x)^2\\
&\Leftrightarrow x^4 - 8x^3 + 16x^2 + 27x - 29 = 0\\
&\Leftrightarrow (x - 3)(x + 2)(x^2 - 7x + 15) = 0\\
&\Leftrightarrow x = 3 \text{ (do điều kiện và } x^2 - 7x + 15 > 0.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x = 3$. Cách 2: Đặt $\sqrt{10 - 3x} = y$, suy ra $0 \le y \le \dfrac{4}{3}$ (1) và $x = \dfrac{10 - y^2}{3} \Rightarrow x - 2 = \dfrac{4 - y^2}{3} > 0$ với mọi y thỏa mãn (1). Khi đó ta được

$$\begin{aligned}
\sqrt{4 - 3y} = \frac{4 - y^2}{3} &\Leftrightarrow 4 - 3y = \frac{y^4 - 8y^2 + 16}{9}\\
&\Leftrightarrow y^4 - 8y^3 + 27y - 20 = 0\\
&\Leftrightarrow (y - 1)(y + 4)(y^2 - 3y + 5) = 0\\
&\Leftrightarrow y = 1.
\end{aligned}$$

Hay ta được $\sqrt{10 - 3x} = 1 \Leftrightarrow x = 3$.
Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x = 3$.

Bài toán 4.21 (1998 - Canada MO)**.** Giải phương trình $x = \sqrt{x - \dfrac{1}{x}} + \sqrt{1 - \dfrac{1}{x}}$.

Giải (chú dẫn).
Thật vậy, từ điều kiện xác định của phương trình ta phải dẫn đến được $x > 1$.
Với điều kiện đó, phương trình tương đương với

$$\begin{aligned} x - \sqrt{1 - \frac{1}{x}} = \sqrt{x - \frac{1}{x}} &\Leftrightarrow \left(x - \sqrt{1 - \frac{1}{x}}\right)^2 = \left(\sqrt{x - \frac{1}{x}}\right)^2 \\ &\Leftrightarrow (x^2 - 1) - 2\sqrt{x(x^2 - 1)} + x = 0 \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x})^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x} = 0. \text{ Từ đó suy ra } x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Chương 5

Một số bài tập luyện tập

Bài toán 5.1. Giải phương trình

$$\sqrt{3x^2+6x+7}+\sqrt{5x^2+10x+14}=4-2x-x^2.$$

Bài toán 5.2. Giải phương trình

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1.$$

Bài toán 5.3. Giải và biện luận phương trình

$$\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{1-x}=a.$$

Bài toán 5.4. Giải phương trình

$$\sqrt{x^2-p}+2\sqrt{x^2-1}=x.$$

Bài toán 5.5. Giải phương trình

$$\sqrt{4-x^2}+\sqrt{1+4x}+\sqrt{x^2+y^2-2y-3}=\sqrt[4]{x^4-16}-y+5.$$

Bài toán 5.6. Giải phương trình $4x^3-3x=\sqrt{1-x^2}$.

(**Giải** (chú dẫn).
Đặt $x=\cos y$, phương trình có tập nghiệm là

$$S=\left\{\cos\frac{\pi}{8};\ \cos\frac{5\pi}{8};\ \cos\frac{3\pi}{4}\right\}.$$

Bài toán 5.7. Giải phương trình $5+3\sqrt{1-x^2}=8(x^6+(1-x^2)^3)$.

Bài toán 5.8. Giải phương trình $x+\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}=2\sqrt{2}$.

Bài toán 5.9. Giải phương trình $(\sqrt{3}-2x)\sqrt{1-x^2}=\sqrt{3}x-2x^2$.

Bài toán 5.10. Giải phương trình $\dfrac{x(1+x^2)}{1-x^2} = 3\sqrt{1-x^2}$.

Bài toán 5.11. Giải phương trình $\dfrac{(1+x^2)^3}{6x^5-20x^3+6x} = \sqrt{1+x^2}$.

Bài toán 5.12. Giải phương trình $2x^2 + \sqrt{1-x} + 2x\sqrt{1-x^2} = 1$

Bài toán 5.13. Giải các phương trình sau:

1. $\sqrt{x^2+x-1} + \sqrt{x-x^2+1} = x^2 - x + 2$;
2. $\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}} = x(1+1\sqrt{1-x^2})$;
3. $\sqrt{\dfrac{1-x}{x}} = \dfrac{2x+x^2}{1+x^2}$;
4. $\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = 2x^2 - 5x - 1$;
5. $\sqrt[3]{3x^2-x+2001} - \sqrt[3]{3x^2-7x+2002} - \sqrt[3]{6x-2003} = \sqrt[3]{2002}$.

Bài toán 5.14. Giải các phương trình sau:

1. $x^2 - 2x + 3 = \sqrt{2x^2-x} + \sqrt{1+3x-3x^2}$;
2. $\sqrt{\dfrac{42}{5-x}} + \sqrt{\dfrac{60}{7-x}} = 6$;
3. $(x-2)\sqrt{x-1} - \sqrt{2}x + 2 = 0$;
4. $\sqrt[3]{3x+1} + \sqrt[3]{5-x} + \sqrt[3]{2x-9} - \sqrt[3]{4x-3} = 0$;
5. $4x^2 - 4x - 10 = \sqrt{8x^2-6x-10}$.

Bài toán 5.15. Giải các phương trình sau:

1. $x = (2004+\sqrt{x})(1-\sqrt{1-\sqrt{x}})$;
2. $\sqrt{\sqrt{3}-x} = x\sqrt{\sqrt{3}+x}$;
3. $\sqrt{x-\sqrt{x-\sqrt{x-\sqrt{x-5}}}} = 5$;
4. $16x^4 + 5 = 6\sqrt[3]{4x^3+x}$;
5. $x^3 - 3x^2 + 2\sqrt{(x+2)^3} - 6x = 0$.

Bài toán 5.16. Giải các phương trình sau:

1. $\sqrt{5x-1}+\sqrt[3]{9-x}=2x^2+3x-1$;

2. $2\sqrt[4]{27x^2+24x+\frac{28}{3}}=1+\sqrt{\frac{27}{2}x+6}$;

3. $13\sqrt{x-1}+9\sqrt{x+1}=16x$;

4. $\sqrt[3]{x+86}-\sqrt[3]{x-5}=1$;

5. $\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}-(x-4)\sqrt{x-7}-3x+28=0$.

Bài toán 5.17. Giải các phương trình sau:

1. $\dfrac{2+\sqrt{x}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{x}}}+\dfrac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{x}}}=\sqrt{2}$;

2. $2\sqrt{2x+4}+4\sqrt{2-x}=\sqrt{9x^2+16}$;

3. $2x^2-5x+2=4\sqrt{2(x^3-21x-20)}$;

4. $x^3-3x=\sqrt{x+2}$;

5. $x^4+2x^3+2x^2-2x+1=(x^3+x)\sqrt{\dfrac{1-x^2}{x}}$

Bài toán 5.18. Giải các phương trình sau:

1. $x^3-\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{x+6}}=6$;

2. $\dfrac{4}{x}+\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}=x+\sqrt{2x-\dfrac{5}{x}}$;

3. $\sqrt{2x^2+4x+7}=x^4+4x^3+3x^2-2x-7$;

4. $\sqrt{1-x^2}+\sqrt[4]{x^2+x-1}+\sqrt[6]{1-x}=1$;

5. $\sqrt{1-x^2}=\left(\dfrac{2}{3}-\sqrt{x}\right)^2$

Bài toán 5.19. Giải phương trình

1. $3(\sqrt{2x^2+1}-1)=x(1+3x+8\sqrt{2x^2+1})$;

2. $2(x^2+2)=5\sqrt{x^3+1}$;

3. $64x^6-112x^4+56x^2-7=2+\sqrt{1-x^2}$;

4. $\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}(\sqrt{(1+x)^3}-\sqrt{(1-x)^3}=2+\sqrt{1-x^2}$;

5. $\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}(\sqrt{(1+x)^3}-\sqrt{(1-x)^3}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}+\sqrt{\dfrac{1-x^3}{3}}$.

Bài toán 5.20. Giải các phương trình sau:

1. $x^3-6\sqrt[3]{6x+4}-4=0$;
2. $2(x^2-3x+2)=3\sqrt{x^3+8}$;
3. $\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}=\sqrt[6]{x^2-1}$;
4. $\sqrt{x^2+15}=3\sqrt[3]{x}+\sqrt{x^2+8}-2$;
5. $\sqrt{x}+\sqrt[4]{x(1-x)^2}+\sqrt[4]{(1-x)^3}=\sqrt{1-x}+\sqrt[4]{x^3}+\sqrt[4]{x^2(1-x)}$.

Bài toán 5.21. Giải các phương trình sau:

1. $x^3+1=3\sqrt[3]{3x-1}$;
2. $x+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{35}{12}$;
3. $2x^2-11x+21-3\sqrt[3]{4x-4}=0$;
4. $x^4+4x^3+6x^2+4x+\sqrt{x^2+2x+10}=2$;

Bài toán 5.22. Giải các phương trình sau:

1. $x+\dfrac{3x}{\sqrt{1+x^2}}=1$;
2. $(x-1)\sqrt{x-1}+5\sqrt{x-1}+4x-4=0$;
3. $10x^4-14x^2+19=(5x^2-38)\sqrt{x^2-2}$;
4. $(x+1)\sqrt{x^2-2x+3}=x^2+1$;
5. $\sqrt{\dfrac{1}{2}-x\sqrt{1-x^2}}=1-2x^2$.

Bài toán 5.23. Giải phương trình

1. $\dfrac{1+3\sqrt{x}}{4x+\sqrt{2+x}}-1=0$;
2. $x^3-3x-\sqrt{x+2}=0$;
3. $8x^3-4x-\sqrt[3]{6x+1}-1=0$;

4. $x^2 + (3 - \sqrt{x^+2})x - 2\sqrt{x^2+2} - 1 = 0$;

5. $3x + \sqrt{x^2+5} - \sqrt{x^2+12} - 5 = 0$.

Bài toán 5.24. Giải các phương trình sau:

1. $\sqrt{2}(x^2+8) = 5\sqrt{x^3+8}$;

2. $4x - x^2 = 3\sqrt{4 - 3\sqrt{10-3x}}$;

3. $(x+3)\sqrt{(4-x)(12+x)} = 28 - x$;

4. $2\sqrt{x+1} + 6\sqrt{9-x^2} + 6\sqrt{(x+1)(9-x^2)} = 38 + 10x - 2x^2 - x^3$;

Bài toán 5.25. Giải phương trình

$$\sqrt{-4x^4y^2 + 16x^2y + 9} - \sqrt{x^2y^2 - 2y^2} = 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right).$$

Bài toán 5.26. Giải phương trình

$$\underbrace{2\sqrt{x^2 - \frac{1}{4} + \sqrt{x^2 - \frac{1}{4} + \sqrt{x^2 - \frac{1}{4} \cdots + \sqrt{x^2 - \frac{1}{4} + \sqrt{x^2 + x + \frac{1}{4}}}}}}}_{\text{2008 dấu căn thức bậc hai}} = 2x^3 + 3x^2 + 3x + 1.$$

Tài liệu tham khảo

[1] Babinskaja I.L., 1975. Các đề thi Olympic Toán (Tiếng Nga), "Nauka" Moskva.

[2] Nguyễn Văn Mậu, 1993, *Phương pháp giải phương trình và vất phương trình,* NXBGD

[3] Nguyễn Văn Mậu, 2002. *Đa thức đại số và phân thức hữu tỷ,* NXBGD

[4] Nguyễn Văn Mậu, 2006. *Bất đẳng thức, Định lý và áp dụng,* NXBGD

[5] Nguyễn Anh Tuấn, *Phương pháp giải một số dạng phương trình vô tỷ,* Kỷ yếu Trại hè Hùng Vương, 2009